Рекомендуется к прочтению параграф 73 2-го тома Ландау-Лифшица.

Ранее мы рассматривали излучение медленно движущихся заряженных частиц. Теперь рассмотрим движение быстро движущихся заряженных частиц. В дипольном приближении хотя бы.

У нас есть одна хорошая система отсчёта – связанная с самой частицей! Хочется сказать, что там она покоится и вообще ничего не излучает. А вот и нет: в системе частицы она в данный момент имеет нулевую скорость, но не нулевое ускорение.

Тогда остаётся справедливой формула $dW = -\frac{2q^2}{3c^3} a^2 dt$, т.к. в этом случае применимо нерелятивистское приближение. Именно в данной СК.

Замечание. Мы можем перейти полностью в систему частицы, прям жёстко привязать нуль координат к ней. Но это будет переход в неинерциальную СК со своими приколами. Там метрический тензор будет иметь достаточно сложный вид и are you really want to go to this sistema otchyota? I do not. СТО работает только с инерциальными СК, неинерциальные – это удел ОТО со своими приколами.

Так что мы перейдём в СК, которая и инерциальна, и где у частицы нулевая скорость. Назовём эту СК инерциальной СК частицы.

Кстати, частица излучает энергию… а что насчёт импульса? В инерциальной системе частицы это будет ноль в силу симметрии.

Попытаемся записать всё это в тензорном виде

$$dW_i = -\frac{2q^2}{3c}\sum_k \overset{a^k}{\overset{\|}{\frac{dv^k}{d\tau}}}\ \overset{a_k}{\overset{\|}{\frac{dv_k}{d\tau}}}\, dr^i$$

Тут мы заодно знакомимся в 4-ускорением. Как несложно понять, это4-скорость, продифференцированная по новому времени.

Коэффициент также немного изменился: в знаменателе теперь с, а не c^2. Это связано с тем, что вместо dt теперь dx^i другой размерности.

Собственно, если мы знаем 4-ускорение частицы, то мы знаем скорость изменения 4-энергии частицы. Но, как правило, мы знаем 4-скорость, а не 4-ускорение. Вон в той же силе Лоренца-Кулона фигурирует именно скорость, а не ускорение. Поэтому перейдём от ускорениям к скоростям.

Для этого напишем силу Кулона-Лоренца

$$\frac{dp_k}{dT} = \sum_l \frac{q}{c} \text{Ш}_{kl} V^l$$

И выразим 4-импульс через 4-скорости:

$$mc\frac{dV_k}{dT} = \sum_l \frac{q}{c} \text{Ш}_{kl} V^l$$

$$\frac{dV_k}{dT} = \sum_l \frac{q}{mc^2} \text{Ш}_{kl} V^l$$

Вот и мы подсчитали 4-ускорения! Подставляем:

$$dW_i = -\frac{2q^2}{3c}\sum_k \sum_l \frac{q}{mc^2} \text{Ш}^{kl} V_l \, \frac{q}{mc^2} \text{Ш}_{kl} V^l \, dr^i$$

Что можно чуть-чуть упростить

$$-\frac{2q^4}{3m^2c^5}\sum_{k,l} \text{Ш}_{kl} \text{Ш}^{kl} V_l V^l$$

Или, в привычных 3-обозначениях

$$\frac{2e^4}{3m^2c^3}\,\frac{\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}\,[\mathbf{vH}]\right\}^2-\frac{1}{c^2}\,(\mathbf{Ev})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Ландау-Лифшиц ещё считает угловое распределение мощности. Здесь мы видим типичную сущность СТО: как только мы переходим к привычным трёхмерным величинам, уравнения становятся ОЧЕНЬ жуткими.